Journal homepage: http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM/index

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(01): 82-101 (2017)

Existencia global y explosión de la solución de un problema de difusión - reacción

Global existence and blow up of the solution of a problem diffusion - reaction

JOSÉ MORALES RUBIO *

Received, Set. 20, 2017 *Accepted, Dec. 20, 2017*

Resumen

En este artículo se hace un estudio analítico sobre la existencia global y local de la solución de un problema de difusión - reacción. Se demuestra que si la solución existe localmente entonces ésta llega a explotar en tiempo finito. Este resultado se extiende al caso en que la solución exista globalmente. Se llega a concluir que el tiempo máximo de existencia de la solución depende del dominio, del término que representa la reacción en la ecuación y de una función prueba definida en este trabajo. Así mismo se plantea la posibilidad de extender la existencia local a global usando el concepto de solución propia.

Palabras clave. problema de difusión - reacción, existencia global, existencia local, solución explosiva, tiempo de exposión.

Abstract

This article presents an analytical study on the local and global existence of the solution of diffusion - reaction problem. We show that if the solution exists locally then, it blows up in finite time. This result covers the case that the solution exists globally. We concluded that the maximum time of existence of the solution depends on the domain, the term representing the reaction in the equation and a test function defined in this job. Likewise we propose the possibility of extending the local existence to the global one using the proper solution framework.

Keywords. diffusion - reaction problem, global existence, local existence, blow up solution, blow up time

1. Introducción. Muchos problemas físicos son modelados analizando el balance de dos fenómenos: la difusión y la reacción. Según [1], puede entenderse al primero como la dispersión de las especies (sustancias) involucradas en el proceso a lo largo del dominio físico del problema (movimiento local), y el segundo, como el proceso de interacción mediante el cual se generan o se consumen las especies involucradas (crecimiento, cambios de estado, etc).

En [2] estudian problemas. Se establecieron resultados complementarios sobre existencia global de soluciones y explosión de las mismas. En [1, 2], si $f(u)$ es acotada superiormente por una clase de funciones βu^p, $\beta > 0, 1 \leq p < 2r - 1$, para $r > 1$, entonces la solución explota en tiempo finito, si por el contrario $1 < 2r - 1 < p$, entonces la solución u existe globalmente y es acotada. A un criterio similar se llega en [2], sólo que en este caso se trabajó para sistemas.

1.1. Solución propia minimal de un problema de difusión - reacción.

* José Morales Rubio, Universidad de Porto, Av. La Madrid. 17, San José- Costa Rica. Corresponding author *morales@virtual.com.pe*.

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.01.09

El concepto de solución propia minimal fue introducido por Baras y Cohen [2] y fue desarrollado por Galaktionov y Vazquez [?, ?] para el caso de problemas de difusión - reacción con condiciones de frontera tipo Dirichlet.

Para formalizar el concepto de solución propia considerar el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(u(x,t)), & \mathrm{x} \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), & \mathrm{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

donde f es una función de Lipschitz global en $\mathbb{R}^+$.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach, por ejemplo $\mathbb{X} = L^2(\Omega)$, y $\mathbb{B} \subset X$, el cual puede se puede tomar de tal forma que la ecuación de (6) genere un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en $\mathbb{B}$. Según [?] es posible tomar $\mathbb{B} = L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.1.1. Construcción de la solución propia minimal de un problema de difusión - reacción [1].

Considerar el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = f_n(x,t,u(x,t)), & \mathrm{x}, \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \mathrm{x} \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & \mathrm{x} \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{7}$$

2. Material y Métodos.

2.1. Objeto de estudio.

Sea $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable sobre Ω y una vez diferenciable en $(0,T)$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = f(x,t,u(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \mathrm{x} \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty), \end{cases} \tag{9}$$

donde: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω es conjunto abierto y acotado con frontera suave, f es una función continua en (x,t) y

2.2. Instrumentación.

Sea el multi índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, con α_i enteros no negativos y $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se denota la derivada de orden α como:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

2.3. Métodos y técnicas.

2.3.1. Método de semigrupos de operadores. Existencia y unicidad de la solución de un problema de difusión - reacción.

La idea de aplicar el marco de semigrupos para problemas no lineales de ecuaciones en derivadas parciales ha sido ampliamente utilizado en problemas de difusión y reacción (Kovács [?], Galaktionov y Vázquez [1], De Assis [2], Iancu [2] y Machado [3]). Si bien es cierto que este método no resuelve de manera explícita el problema (??),pero nos proporciona un marco funcional adecuado para aproximar soluciones y establecer en que espacios están dichas soluciones.

Se consideró el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + Au(t) = f(t, u(t)), & \text{t} > 0, \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{X}, \end{cases} \tag{10}$$

donde $-A$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathbb{X}$, $f : [0, T] \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ es una función continua en t y de Lipschitz en u, es decir, $f \in C([0, T] \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$. Notar que es posible considerar $T = +\infty$.

Definición 1. *La función $u : [0, T) \longrightarrow \mathbb{X}$ es una solución clásica de (10) en $[0, T)$ si y sólo si $u \in C^1([0, T]; \mathbb{X}) \cap C([0, T); D(A))$, y u satisface el problema (10).*

3. Resultados.

Se enuncia el resultado principal de este trabajo:

Teorema 1. *Sea el problema* (**??**)*:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t, u(x, t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

4. Conclusiones.

Del estudio realizado se concluye que:

Agradecimientos. El autor agradece de forma especial a Juan Rodriguez

Referencias

[1] J.M. Arrieta, *On boundedness of solutions of reaction - diffusion equations with nonlinear boundary conditions*. Proceedings of the American Mathematical Society. Feb. 2008; 136(1): 151 - 160.

[2] J.M. Arrieta AND A. Rodriguez Bernal, *Blow - up versus global boundedness of solutions of reaction - diffusion equations with nonlinear boundaryconditions*. Proceedings of Equations. 2005; 11: 1 - 7.

[3] J.M. Arrieta AND Rodriguez Bernal A, *Localization on the boundary of blow - up for reaction - diffusion equations with nonlinear boundary conditions*. Communications in Partial Differential Equations. 2004; 29(7 - 8): 1127 - 1148.